

1.下面将知难而上,执着前行者的途经之路列举几种:

【方法一】基本不等式

充分利用丰富的三角恒等变换公式,加上最后临门一脚(基本不等式)得解.

$$\begin{aligned} \text{由 } f(x) &= 2\sin x(1+\cos x) = 2\sin x \cdot 2\cos^2 \frac{x}{2} = 8\sin \frac{x}{2} \cdot \cos^3 \frac{x}{2} = \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} \sqrt{3\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^6 \frac{x}{2}} \leq \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 当且仅当} \\ 3\sin^2 \frac{x}{2} &= \cos^2 \frac{x}{2}, \text{ 即 } \tan \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 } f(x)_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

这里用到了基本不等式: $a, b, c, d > 0$ 时, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, 或 $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$.

或对函数 $f(x)$ 进行平方得:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= 4\sin^2 x(1+\cos x)^2 = 4(1-\cos^2 x)(1+\cos x)^2 \\ &= 4(1-\cos x)(1+\cos x)^3 \\ &= \frac{4}{3}(3-3\cos x)(1+\cos x)(1+\cos x)(1+\cos x) \leq \frac{4}{3}\left(\frac{6}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\text{故 } f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 从而 } f(x)_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【方法二】导数法

导数法是分析函数单调性而得知函数的最值方法,这是导数的拿手好戏!

由 $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $\cos x = \frac{1}{2}$, 易知函数的最小正周期

为 2π , 在 $[-\pi, \pi]$ 中, $f(x)_{\min} = f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【方法三】换元导数法

利用三角函数中的“万能公式”进行换元,再结合导数进行求解.

$$\text{万能公式如下: } \cos x = \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}, \sin x = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}. \text{ 令 } t =$$

$\tan \frac{x}{2}$ ($\tan \frac{x}{2}$ 有意义), 则 $g(t) = 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \frac{8t}{(1+t^2)^2}$. 后续利用导数对 $g(t) = \frac{8t}{(1+t^2)^2}$ 进行分析, 得出答案, 过程略去.

【点评】

高考试题在对应的题号内容上一般与往年试题会有人为的区别,正如“铁打的营盘流水的兵”,年年不同,年年出新.由于在课本导数这一章中有过用导数求三角函数最值的练习,而往年第16题的位置上没有出现过这类试题,故今年就在这一位置出上一道形似而神不似的压轴题,既在意料之外,又在情理之中.

今年本题精妙之处在于平和却不平淡,看似平淡却不平庸,起初你或许会想用三角恒等变换常规思路去谋求解决,在并不能一蹴而就时,你要么知难而上,要么激流勇退转换思路,重新拾级而上,唯有不畏陡峭山路并能选好路线而努力攀登的人们才能到达光辉的顶点.本题是一道考查核心素养有区分度的好题!

变式练习一

1. 已知函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.
2. 已知函数 $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.
3. 过点 $(-1, 0)$, 且倾斜角为 α 的直线 l 与圆 $E: (x-2)^2 + y^2 = 20$ 相交于 A, B 两点, 若 $\angle AEB = \frac{2\pi}{3}$, 则 $3\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha$ 的值为()

- A. $\frac{11}{9}$ B. $\frac{13}{9}$ C. $\frac{14}{9}$ D. $\frac{16}{9}$

【答案】

1. 解

由 $f'(x) = 2\cos x - 2\cos 2x = -4\cos^2 x + 2\cos x + 2 = -2(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $\cos x = -\frac{1}{2}$, 或 $\cos x = 1$, 易知函数的最小正周期为 2π , 在 $[-\pi, \pi]$ 中, $f(x)_{\min} = f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. 解

由 $f'(x) = -2\sin x - 2\cos 2x = 4\sin^2 x - 2\sin x - 2 = 2(2\sin x + 1)(\sin x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $\sin x = -\frac{1}{2}$, 或 $\sin x = 1$, 易知函数的最小正周期为 2π , 在 $[-\pi, \pi]$ 中, $f(x)_{\min} = f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. C.

(二) 解答题第17题

本题为解答题的第1道大题,为给考生营造平缓有利的过渡环境,题文设计简洁,着眼于课本基础知识与基本应用,让考生开个好头.题目不配图形,着意考查根据题意描绘图形的能力.

「分析」

在画出图形并进行分析后,为求出第(1)问中的 $\cos \angle ADB$ 的值,考生需用正弦定理先求出 $\sin \angle ADB$ 的值,而后用同角的平方关系再求出 $\cos \angle ADB$ 的值;在解第(2)时,用余角的诱导公式先求出 $\cos \angle BDC$ 的值,最后用余弦定理求出 BC 的大小.

「作答」

(1) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理

$$\text{得 } \frac{BD}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}.$$

$$\text{由题设知, } \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin \angle ADB},$$

$$\text{所以 } \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

